

# EL ESPACIO EN LEIBNIZ: NÚMERO Y RELACIÓN

*Godofredo Iommi Amunátegui*

Instituto de Física, Universidad Católica de Valparaíso

*Mauricio Schiavetti Rosas*

Instituto de Filosofía, Universidad Católica de Valparaíso

## I

**RE** En un trabajo anterior acerca del espacio en el Kant precrítico nos salió al paso, casi a modo de contrapunto, lo que Leibniz aseveraba al respecto. En este artículo intentamos hacernos cargo no sólo del despliegue de este pensamiento sino de pensar desde y acaso contra Leibniz. Este modo de trabajo permite ver las vacilaciones, lagunas, desvaríos propios tal vez de toda concepción del espacio.

El árbol genealógico, modelo leibniziano del espacio, proponemos entenderlo como tejido de relaciones y sistema discreto. A su vez, esto último trae consigo, anverso o reverso, el dilema de lo continuo. Tal es, en breve, la secuencia de estas páginas.

No hemos intentado entonces dar coherencia al propósito o despropósito de Leibniz, sino más bien construir un marco mental dentro del cual sus asertos mantengan finura y alcance.

## II

*Proposición:* El árbol es modelo del espacio en tanto:

- i) Tejido n-dimensional de relaciones.
- ii) Sistema discreto.

NOTA: *Las contrapartes incongruentes: el descubrimiento del espacio en Kant.* Revista de Filosofía, Universidad de Chile, Vol. XXV (noviembre, 1985).

i) *El Espacio*: Tejido n-dimensional de relaciones

La complejidad de lo pensable resulta de una conjunción de atributos. Un término cualquiera ha de ser resuelto en partes formales —definiciones— las cuales a su vez se dividen hasta las partes simples, inaccesibles al análisis. Estos términos primitivos se comprenden por analogía —no por definición—.

El rasgo radical de este pensar es matemático: Los términos simples corresponden a los números primos y los términos complejos a productos de números primos. Puesto que un número natural sólo puede descomponerse de un modo en factores primos, la definición de cada término puede interpretarse sin ambigüedad.

El espacio, complejo tejido de relaciones, se expresa mediante un árbol genealógico: “Y sin embargo estos lugares, líneas y espacios genealógicos sólo son cosas ideales aunque expresen verdades reales”.

Para aclarar esa contraposición Ideal-Real debe atenderse al verbo que vincula estos términos: Expresar.

En *Quid Sit Idea*, Leibniz dice: expresar algo es propio de lo que mantiene las estructuras correspondientes a las cosas por expresar. Tales expresiones son diversas: el modelo de una máquina expresa la máquina misma, las cifras expresan números, el discurso expresa pensamientos. Lo común a todas estas expresiones: de la sola consideración de las estructuras de la expresión puede llegar a conocerse la propiedad correspondiente de la cosa expresada. No se requiere, a tal efecto, la expresión sea idéntica o semejante a la cosa; basta cierta analogía entre las estructuras.

Así, la raíz misma de la diferencia cosas ideales-verdades reales, es la posibilidad del modelo. La palabra *expresar* recoge en sí al concepto de modelo.

El árbol es un modelo del espacio entendido como orden de coexistencias posibles entre los cuerpos. Ese orden establece un conjunto de relaciones.

(“*Quid Sit Idea*”. Gerhardt VII, pp. 263-264).

El árbol genealógico da cuenta de las relaciones. En él, los lugares están determinados por ellas. Tal árbol es un tejido de relaciones y, a la vez, representa a un tejido de relaciones. Surge una dificultad: el árbol representa al árbol. Si el árbol es modelo del árbol, entonces a menos que el árbol sea idéntico al espacio, el espacio —propia y directamente— queda fuera del alcance del modelo.

¿Cómo pensar, seguir pensando, más allá del dilema?

El espacio, complejo de relaciones, puede analizarse, y el análisis sigue el curso de la descomposición en factores primos. Ahora, y este es el punto que hace de gozne en la proposición, al conjunto de divisores de un entero puede asignarse un diagrama de Hasse —el árbol genealógico constituye un tal diagrama—. El número de dimensiones del diagrama está dado por el número de factores primos de la descomposición. Un solo factor corresponde a un diagrama lineal, dos factores a un diagrama bidimensional, etc. Si en la descomposición hay  $n$  factores primos, el diagrama de Hasse es  $n$ -dimensional.

Entonces: El modelo representa y a la vez genera un espacio. Algunos ejemplos aclararán la operatoria. Considérese a los números 4, 6, 30, 210 cuya descomposición factorial es:

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Los diagramas de Hasse de sus divisores son:

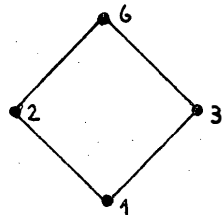
$4 = 2^2$

1 factor primo:  
diagrama de 1  
dimensión



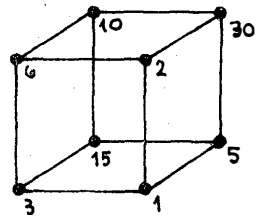
$6 = 2 \cdot 3$

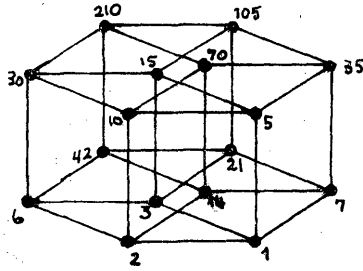
dos factores primos:  
Diagrama bidimensional



$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

tres factores primos:  
Diagrama tridimensional





$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

cuatro factores primos:  
Diagrama tetradsimensional

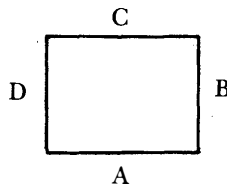
- El diagrama es un hipercubo, de 16 vértices
- 32 aristas
- 24 caras
- 8 celdas o hipercaras

Tal es la construcción del espacio basada en la divisibilidad de los enteros. Cabe una precisión, sin embargo: pareciera, aquí, que las dimensiones caracterizaran la forma de un objeto, situado ahí. Nada más ajeno a Leibniz que un tal espesor sustancial del espacio. Se trata, de hecho, de las dimensiones de una representación de las relaciones. En esa óptica, las dimensiones son rasgos de un modelo sustentado en aquel del tejido de relaciones. Una suerte de modelo de segundo grado, entonces.

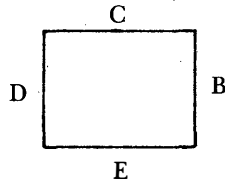
Pensar la relación, y al hacerlo prescindir del espacio; en otras palabras: construir el espacio en base a relaciones cuyo carácter ha de ser no-espacial para eludir la circularidad en el procedimiento de construcción.

De tal modo, acaso, pueda formularse el núcleo del pensamiento —de la tensión del pensamiento— enfrentado al pensamiento de Leibniz e intentando proseguir por esa vía.

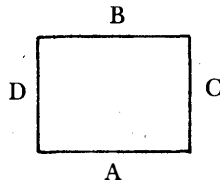
Considérese una mesa en torno a la cual se ubican A, B, C, D.



El lugar de A, por ejemplo, en un espacio relacional, está determinado por sus relaciones con D, B y C. Si E se sitúa allí y B, C, D conservan su sitio, E ocupa el lugar de A.



Si B y C intercambian ubicaciones



el lugar de A ya no es el mismo.

Por cierto, al dibujar estas figuras el plano de la hoja de papel constituye un espacio respecto al cual A, B, C, D poseen sitios definidos. Esto indica que cualquier representación análoga del espacio relacional lleva, a ojos vista, a una paradoja o a una inconsistencia.

Conviene entonces, para intentar pensar puras relaciones, *omitir* ese trasfondo sobre el cual se disponen las figuras y su orden de coexistencia.

Tal omisión equivale a desterrar, de cuajo, cualquier intento gráfico, pictórico, de representación.

¿Es pensable una relación en tales condiciones?

Lo individual se retrae; ningún análisis alcanza los menores indicios del individuo: ni residuo ni figura en filigrana. Entre dos sustancias individuales hay siempre una diferencia intrínseca, cualitativa, conocida per se por el entendimiento infinito, y que en consecuencia no exige para ser reconocida de la comparación necesaria a la similitud; por naturaleza la individualidad de las sustancias está más allá de la similitud. Y como no hay identidad sin similitud, los existentes, las proposiciones existenciales, fundadas en la individualidad de las sustancias no pueden reducirse a identidades. De ahí el principio de los indiscernibles.

La individualidad elude la semejanza. Al menos en el plano de la existencia. El modelo concierne a coexistencias posibles, y en él, la semejanza no es abstracción sino percepción de una esencia. La semejanza es una realidad y lo específico una posibilidad de semejanza.

Que la semejanza sea una relación primitiva, no reducible a otras más simples, atestigua del espesor matemático del pensamiento de Leibniz: la relación de equivalencia no nace de la comunidad del carácter abstracto sino que lo engendra. No puede definirse a la semejanza como igualdad de forma pues es justamente la relación de semejanza la que permite introducir la noción de forma.

La semejanza es relación de términos en presencia: “He encontrado que dos cosas son perfectamente semejantes sólo cuando pueden ser discernidas por co-presencia (*per compraesentiam*)”.

En este punto crucial vacila el suelo mismo de este pensamiento: la semejanza al fundarse en la co-presencia supone sitios para los singulares coexistentes; la semejanza aparece en virtud de un espacio.

Afínese la mira: el espacio es un conjunto de relaciones, una de las cuales —paradigmática, si cabe el epíteto— es la semejanza. Esta semejanza, para ser tal, requiere de un espacio que permita discernir entre singulares mediante posiciones. Tal espacio —no relacional— antecede a toda relación.

A menudo seguir el hilo del pensamiento de Leibniz conduce a tales muros ciegos. Lo cual no invalida el intento. Por el contrario, diríase que la práctica de su pensamiento consiste en semejante experiencia.

Entonces: dos instancias espaciales, distintas en cuanto tales. El entendimiento sólo puede confirmar su indiscernibilidad. En esta mismidad asida por el intelecto reside acaso la idea más apoyada o profunda de este pensar: esa mismidad expulsa a tales instancias del orden de la coexistencia y tal salida del orden muestra aquello que hasta ese instante sostenía la espacialidad: red de relaciones; al quedar los puntos desprendidos, fuera del sistema que les otorga ciudadanía, aparece la pura espacialidad: aquello mismo por lo cual dos puntos pertenecen a un espacio, su identidad.

## ii) *El Espacio*: sistema discreto

El árbol de consanguinidad, en tanto concepto referido a instancias diversas, atraviesa de lado a lado el pensamiento de Leibniz. En uno de sus primeros trabajos, la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) la genealogía plantea un problema de índole aritmética y no se relaciona con la reflexión acerca del espacio, de modo explícito, como ocurre en la correspondencia con Clarke (1715).

Asentar esta segunda parte de la proposición consiste en hacer ver que el árbol genealógico inicial constituye, de hecho, un modelo discreto del espacio.

En la *Dissertatio de Arte*, la consanguinidad ocasiona la siguiente cues-

tión: dado un grado de parentesco cualquiera, encontrar el número y la especie de las personas correspondientes.

Un estudio de la solución leibniziana mostrará la estructura matemática subyacente. Las personas pueden enumerarse según el código civil y el código canónico. En el primero, respecto de una persona dada, hay tantas personas como ramificaciones del parentesco. Una ramificación es la secuencia de itinerarios en el árbol: líneas y ángulos, hacia arriba, hacia abajo y hacia los lados. En el segundo, además de las ramificaciones, interviene el sexo de los intermediarios. En la construcción del árbol la posición de cada persona está determinada por dos números: el orden de la generación y los parentescos homogéneos de distinto grado.

Los elementos básicos del cálculo son el grado y el número de parentescos de la persona considerada. Puede aclararse el sentido de estos términos mediante un ejemplo. Supóngase la persona sea el hijo y tómese en cuenta el parentesco hasta el bisabuelo. Hay, entonces, tres grados: hijo-padre, padre-abuelo, abuelo-bisabuelo; y el número de parentescos es cuatro: hijo, padre, abuelo, bisabuelo.

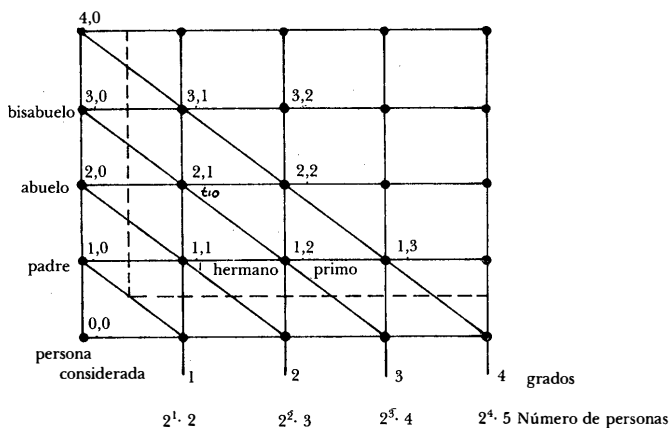
El algoritmo combinatorio mediante el cual Leibniz resuelve el problema es:

$$\text{Número de personas} = (2^{\text{grado}}) \times (\text{Número de parentescos})$$

En el caso anterior:

$$\text{Número de personas} = 2^3 \cdot 4 = 32$$

No es sin embargo éste el aspecto que importa aquí. Atiéndase más bien a la construcción misma del árbol: dos números fijan la posición. Tal procedimiento no difiere en nada de la introducción de un sistema de coordenadas. El esquema del árbol es:



Se establece un sistema de puntos cuyas coordenadas son enteros. Este retículo o red es un espacio discreto bidimensional.

Nótese que ni por mientes Leibniz contempla, en el *De Arte*, esta vertiente del asunto. De cierto modo esta lectura del texto condensa y extrapola, sin eludir anacronismos (ya sea internos, i.e., conjunción de momentos distintos del pensar leibniziano, ya sea externos, i.e., atribuir a Leibniz desarrollos apenas implícitos en su obra). Más bien casi explicitándolos. Tal vez pensar en y desde un texto sea de suyo un ejercicio anacrónico en cuanto toda lectura asume y supone un tiempo y un tempo ajenos a la concepción del texto.

En la generación siguiente, Daniel Bernoulli trató el problema de la cuerda vibrante usando un modelo análogo: consideró la cuerda estaba compuesta por  $N$  cuerpos. Al aumentar  $N$  el modelo se aproximaba al caso físico, la cuerda continua.

La red bidimensional se convierte en un plano mediante un paso límite: ir afinando la trama hasta que coincida con el continuo.

No parece violencia abusiva considerar la posibilidad de este proceso en el pensamiento de uno de los inventores del cálculo infinitesimal.

Por otra parte, la relación discreto-continuo es la vía de acceso a una región delicada, en todo el sentido de la palabra, por la cual Leibniz transitó de por vida: el laberinto del continuum.

## NOTAS

I.

El pensar filosófico se despliega y acontece al hilo de una tradición y en un diálogo vivo.

Señal de esto, entre otras, es la controversia epistolar de Leibniz y Clarke. Dicha controversia deja ver dos concepciones irreconciliables de lo que es el espacio y se constituye, por tanto, en un pie forzado, para todo aquel que intente hacerse cargo de la naturaleza del espacio en Leibniz. Con todo, la lectura de este texto no es fácil. Los argumentos de uno y otro se vuelven de tanto en tanto, cada vez más sutiles y, también, dispersos, desiguales.

Para poder atravesar las aporías que surgen de esta lectura y dejar ver su concepción del espacio, nos vamos a centrar en el espacio como realidad absoluta.

Como es bien sabido, Clarke siguiendo en este punto a Newton, asevera que el espacio es un ser absoluto, por ende, eterno e infinito. De ahí que a juicio de Leibniz, esta manera de entender el espacio llevó a estos caballeros a creer que era Dios mismo, o un atributo suyo, a saber, su inmensidad. Sin embargo, añade, este espacio tiene partes y no se puede identificar con Dios. Clarke precisa su aseveración, el espacio no es un ser eterno o infinito sino a la inversa, es una propiedad o consecuencia de que haya un ser infinito y eterno. Si bien Clarke identifica el espacio infinito con la inmensidad, niega expresamente que esta última sea Dios, y niega también que el espacio infinito se confunda con Dios. No acepta tampoco la supuesta dificultad



que traería consigo el hecho de que el espacio tuviera partes. El espacio para él es uno, absoluto y esencialmente indivisible. Esta afirmación va seguida de la siguiente argumentación: un espacio que tiene partes o está dividido es una contradicción en los términos, ya que debe haber espacio en la partición misma, la cual se supone que está partida y no partida a la vez<sup>1</sup>.

Tampoco la inmensidad de Dios corresponde a la división de la sustancia en partes. No nos ocuparemos de este aspecto de la controversia<sup>2</sup>.

La tarea de Leibniz consiste entonces en conferirle al espacio otro carácter que no sea el de una sustancia. Se trata por cierto de una relación. Había dicho en los Nuevos Ensayos acerca del Entendimiento Humano (L. II, Cap. XII, p. 3) que “esta división de los objetos de nuestros pensamientos en sustancias, modos y relaciones es muy de mi agrado”; y precisaba que “aunque las relaciones sean del entendimiento no son sin fundamento y realidad”.

El espacio es algo puramente relativo, es un orden de coexistencia, o más bien, la posibilidad de las cosas que existen al mismo tiempo, en tanto que existen en conjunto, prescindiendo de sus maneras de existir. Al ver muchas cosas juntas —nos dice— percibimos este orden de las cosas entre ellas. Dicho de otra manera, ni es una sustancia ni es un ser absoluto. Sin embargo, pensamos que el haber llegado a concebir el espacio de esta manera nos dice mucho más que la combinatoria de argumentos que Leibniz emplea en apoyo de su hallazgo.

Por lo pronto, el filósofo hace hincapié en el carácter *uniforme* de dicho espacio. Si las cosas no están situadas en dicho espacio, un punto en él no difiere en modo alguno de otro punto en el espacio.

Este espacio es por cierto el espacio matemático. No hace falta volver a insistir en el carácter matemático del pensar de Leibniz<sup>3</sup>.

Recordemos la argumentación que nos ofrece. Supuesto que el espacio sea algo en sí mismo —fuera del orden de los cuerpos entre sí— sería imposible de que haya una razón de por qué Dios, conservando las mismas situaciones de los cuerpos entre sí, haya situado los cuerpos en el espacio así o así, y por qué no los haya puesto al revés, por ejemplo, por un cambio entre oriente y occidente. Si aceptamos que el espacio sólo es este orden o relación, y que no habiendo cuerpos en él sólo es la posibilidad de establecer un orden o relación de los cuerpos, este estado tal como es y otro que imaginamos precisamente a la inversa no se diferenciarían entre sí. Su diferencia sólo se funda en nuestra suposición de la realidad del espacio en sí misma. Ambos estados son lo mismo ya que en definitiva son absolutamente indivisibles y, por consiguiente, no podemos preguntar la razón de la preferencia de uno u otro (G. VII, p. 363-4).

Esta apelación y puesta en juego por Leibniz del principio de razón suficiente ha sido aceptada por Clarke, el cual, sin embargo, le da un sentido diferente: “es muy verdadero que nada es lo que es sin razón suficiente, y por qué es así más bien que de otro modo”.

<sup>1</sup>“El espacio, finito e infinito, es absolutamente indivisible incluso para el pensamiento (imaginar sus partes movidas entre sí es imaginarlas movidas fuera de sí mismo) y, sin embargo, el espacio no es un mero punto” (G. VII, p. 360).

<sup>2</sup>Descartes nos ha enseñado ya lo arduo del intento, y los requisitos que debe cumplir aquel que pretende llevarlo a cabo, a saber, “la necesidad de alguna extraordinaria asistencia del cielo, y ser más que hombre” (Discurso del Método, Primera Parte).

<sup>3</sup>“Las partes del espacio sólo están determinadas y distinguidas por las cosas que están allí, y la diversidad de las cosas en el espacio, determina a Dios a obrar diferentemente sobre las diferentes partes del espacio. Pero tomado sin las cosas no tiene nada de determinante, e incluso no es nada actual” (G. VII, p. 407).

Y por consiguiente, donde no hay causa ahí no puede haber efecto. Pero esta razón suficiente no es a menudo otra cosa que la “mera voluntad de Dios” (G. VII, p. 359, y también G. VII, p. 369). “Mera voluntad de Dios, sin nada externo que influya en ella, es sólo aquella razón suficiente” (G. VII, p. 367). Por su parte, Leibniz negará expresamente que se pueda identificar la razón suficiente con esta “mera voluntad de Dios”, ya que esa “mera voluntad”, es decir, una simple voluntad sin motivo es para él nada más que “una ficción no sólo contraria a la perfección de Dios sino además quimérica y contradictoria, incompatible con la definición de voluntad y suficientemente refutada en la Teodicea” (G. VII, p. 371-2).

Leibniz va desplegando esta nueva manera de concebir el espacio junto con la reiteración de las múltiples dificultades que trae consigo pensar al espacio como *realidad absoluta*. Así, por ejemplo, nos dice, si el espacio fuese una realidad absoluta sería más subsistente que las sustancias. Dios ni lo cambiaría ni lo destruiría. Sería inmenso, inmutable y eterno en cada parte con lo cual habría una infinidad de cosas eternas fuera de Dios (G. VII, p. 373).

Por otra parte, la materia y el espacio no son lo mismo. Con todo donde no hay materia no hay espacio, y este último en sí mismo no es en modo alguno una realidad absoluta. Espacio y materia —afirma— difieren como tiempo y movimiento. Sin embargo, aunque son diferentes son inseparables (G. VII, p. 406 y también VII, p. 403).

Hay también otras dificultades que surgen del hecho de afirmar el carácter *uniforme* del espacio. Leibniz ha mostrado que la uniformidad del espacio hace que no haya ninguna razón interna o externa para discernir las partes y elegir allí. Pues esta razón externa para discernir sólo podría estar fundada en la razón interna; de otro modo sería discernir la indiscernible, o bien elegir sin discernir. La voluntad sin razón sería el azar de los epicúreos. Y un Dios que obrase por una tal voluntad sería un Dios de nombre (G. VII, p. 374)<sup>4</sup>.

Este carácter *uniforme* del espacio, por consiguiente, implica para Leibniz, que no se puede afirmar, como se ha sostenido, que Dios ha creado las cosas en un espacio o tiempo particular, que le ha gustado, porque todos los espacios y tiempos son en sí mismos perfectamente uniformes e indiscernibles, y por ende no le podría gustar uno más que otro (G. VII, p. 406).

Así al hilo de estas consideraciones vemos, a un Leibniz poniendo en juego dos de sus más preciados principios: el de razón suficiente y el de los indiscernibles<sup>5</sup>.

Las dificultades sin embargo no concluyen a su parecer con las observaciones anteriores. Dice Leibniz que admitir que el espacio *infinito* no tiene partes equivale a sostener que no está compuesto de espacios finitos, y que podría subsistir si todos los espacios finitos fueran reducidos a nada. En el lenguaje de Descartes, se trataría de un universo corpóreo extenso sin límites que subsistiría cuando todos los cuerpos que lo constituyen fueran reducidos a nada (G. VII, p. 373). Este punto le permite precisar su concepción del espacio finito. No se trata de la extensión o mensurabilidad de algo finito, ya que el espacio ocupado por un cuerpo sería la

<sup>4</sup>Si el espacio es uniforme no es dable discernir entre uno y otro de sus puntos: no hay razón, ni externa ni interna, para ello. Puede intentarse pensar el problema de la incongruencia de las manos izquierda y derecha, a partir de esta premisa: una mano, a solas, es indiscernible de otra mano, a solas. Sólo por copresencia pueden distinguirse. Este distingo apunta al espacio en tanto permite la comparación de ambas manos. Este espacio, en el cual las manos comparecen, va de suyo. Se entiende por qué Kant al hacer de la incongruencia entre la mano derecha y la mano izquierda una prueba de la existencia del espacio tuvo que modificar estos supuestos.

<sup>5</sup>Acerca del carácter de este último principio, Cf. B. Russell, *Exposición Crítica de la Filosofía de Leibniz*, Edición Siglo Veinte, 1977, p. 74 y siguientes.

extensión de este cuerpo. Pero esto es un absurdo ya que un cuerpo puede cambiar de espacio pero no puede abandonar su extensión (G. VII, p. 398). Y le permite también insistir en la imposibilidad de identificar el espacio infinito con la inmensidad de Dios ya que lo que está en el espacio estaría en la inmensidad de Dios y por ende en su esencia (G. VII, p. 399). No debemos confundir la inmensidad o extensión de las cosas con el espacio según el cual esta extensión está tomada. Así como el espacio infinito no es la inmensidad de Dios así el espacio finito no es la extensión de un cuerpo. Las cosas cambian su extensión pero no su espacio, cada una tiene su propia extensión pero no su propio espacio (G. VII, p. 399).

Leibniz discutió también largamente la afirmación que hace del espacio una *propiedad de Dios*.

La propiedad de Dios —nos dice— es la inmensidad, pero el espacio que es conmensurado con los cuerpos y esta propiedad de Dios —su inmensidad— no son lo mismo (G. VII, p. 398).

Por otra, si lo fuera, el espacio entraría en la esencia de Dios; y como el espacio tiene partes, habría partes en la esencia de Dios. Además, los espacios son vacíos o llenos, luego en la esencia de Dios habría partes llenas y vacías, sujetas a un cambio perpetuo. En el primer caso, los cuerpos llenarían el espacio y una parte de la esencia de Dios y serían conmensurados con éste. En el segundo caso, una parte de la esencia entraría en el recipiente. Se trataría de un Dios con partes, similar al estoico, es decir, el universo entero considerado como un animal divino (G. VII, p. 399).

Más dificultades: la inmensidad de Dios hace que éste esté en todos los espacios. Si está en el espacio no se puede decir que el espacio esté en Dios, o que es una propiedad. Es la propiedad la que está en un sujeto y no a la inversa (G. VII, p. 399).

Se pregunta entonces de qué cosa puede ser propiedad el espacio vacío limitado. Y responde, no de Dios, tal vez de una sustancia inmaterial extensa imaginaria en un espacio imaginario (G. VII, p. 398-9). Es claro entonces que si se piensa al espacio como una propiedad debe serlo de una sustancia. Con todo, el espacio vacío limitado que algunos suponen entre dos cuerpos de qué sustancia sería propiedad o afección (G. VII, p. 372). No se trata de la propiedad de una sustancia que está en el espacio ya que este mismo espacio sería la propiedad de un cuerpo como de otro, de una sustancia inmaterial como de Dios, cuando está vacío de toda otra sustancia material o inmaterial.

Se trataría a su juicio de una extraña propiedad que pasa de sujeto en sujeto. Éstos dejan sus accidentes como hábitos para que otros se revistan de ellos, con lo cual, no podemos distinguir los accidentes y las sustancias (G. VII, p. 398).

Con los argumentos anteriores, sin embargo, Leibniz no invalida la posibilidad de pensar al espacio como una propiedad si se lo considera como una *relación u orden de las cosas*. Lo muestra así: un espacio infinito tiene una propiedad, la inmensidad. Un espacio finito será una extensión limitada o mensurable. A su vez, la extensión debe ser la propiedad de algo extenso. Ahora bien, si este espacio es vacío será un atributo sin sujeto, una extensión de ninguna cosa extensa. Así, la única posibilidad de pensar al espacio como una propiedad es entenderlo como un orden de cosas y no como algo absoluto (G. VII, p. 372-73).

Leibniz precisa su definición del espacio. Es verdad que el espacio no depende de tal situación de los cuerpos. Es este *orden* que hace que los cuerpos sean situables y por el cual tienen una situación entre sí existiendo allí. Con todo, si no hubiesen allí criaturas, el espacio sólo estaría en las ideas de Dios (G. VII, p. 376).

Es un orden de la existencia de las cosas que se observa en su simultaneidad. Ahora bien, un universo material finito que anda íntegro en un espacio vacío es una ficción; no hay un espacio real fuera del universo material; se trataría de una acción sin fin. Es un producto de la imaginación de los filósofos que hacen del espacio una realidad absoluta (G. VII, p. 395-396).

El espacio —añade— es un orden de situaciones o según el cual las situaciones están dispuestas. El espacio abstracto es este orden de situaciones concebido como posible. Así, es algo *ideal* (G. VII, 415). Este orden tiene su cantidad: hay el que precede y el que sigue, la distancia e intervalo. Las cosas relativas tienen su cantidad; las razones matemáticas tienen su cantidad y se miden por logaritmos, y, sin embargo, son relaciones (G. VII, p. 404).

Estas aseveraciones de Leibniz acerca del espacio como orden nos suscitan algunas dificultades. Ha dicho que el espacio como orden es lo que permite que los cuerpos sean situables. Sin embargo, ha añadido a continuación que sin los cuerpos o las criaturas, el espacio no sería nada más que una idea de Dios. Y ha dicho también que el espacio tomado sin las cosas no tiene nada de determinante ni es nada actual (G. VII, p. 407).

Y ha sostenido en otra parte (G. VII, p. 400) que al existir muchas cosas a la vez podemos observar en ellas un cierto orden de coexistencia, según el cual la relación de una cosa con otra es más o menos simple. Este orden es su situación o distancia.

De acuerdo con lo anterior, no queda claro entonces cómo el orden hace posible que los cuerpos sean situables ya que a la inversa sólo podemos hablar de un orden de la coexistencia como percibido en la medida en que estén muchas cosas a la vez.

No es nada claro tampoco decir que este orden es su situación. ¿No se trata sin más de una reiteración? Por lo demás la dificultad no es nueva, ya Clarke la había expresado, comunicándonos su perplejidad (G. VII, p. 387-8).

## II.

B. Russell, en el libro acerca de Leibniz —1900—, escrito diríase lápiz en mano anotando al margen de la obra comentario y crítica, nota que hay dos tipos de Teoría Espacial; ambos provienen de la alternativa de subrayar una u otra de las ideas siguientes: sean dos puntos A y B; éstos guardan entre sí: a) una distancia que es una relación entre los dos, b) una longitud actual que consta de cierta porción del espacio, la que se extiende de A a B.

En la primera los términos A y B cuya relación establece el espacio, no son espaciales puesto que ellos mismos no son relaciones. La segunda lleva a dividir la distancia actual entre A y B en un número infinito de puntos, cada uno igual a los puntos terminales A y B, la distancia se origina entonces en la repetición de tales puntos inextensos. "A critical exposition of the Philosophy of Leibniz", Allen and Unwin, London 1900 (Trad. H. Rodríguez, Ed. Siglo Veinte, Buenos Aires, 1977).

La dificultad al pensar una teoría del espacio, sin contradicciones, se muestra así a las claras.

Y. Belaval intenta resolver la encrucijada del espacio relacional mediante por así decirlo un vuelco hacia el espacio de los órdenes posibles: parte de la multiplicidad de las esencias individuales y de sus relaciones. Entre tales individuos, posibles, no existe distancia de modo que sus relaciones los diferencian sin distanciarlos. En este plano individuo y continuo no se excluyen. Esta pluralidad de esencias y de relaciones concierne al entendimiento; define un espacio que para ser no necesita existir: las nociones completas *son*. Aquí otra dificultad sale al paso: la mónada, noción completa, es creada luego existe; no es sólo posible. Belaval sortea el escollo diciendo: lo que es llevado a la existencia es el ser de las mónadas, las mónadas son por tanto pensadas como nociones completas antes de ser llevadas a la existencia. (Yvon Belaval: *Etudes Leibniziennes —De Leibniz á Hegel—*. Gallimard, 1976 (l'espace, 208-215). Acaso dejar a solas esta dificultad, sin solución, por hábil que sea, contribuye de mejor manera a la comprensión, esto es: al enfrentamiento con sus aristas, del pensamiento de Leibniz. Dificultad que por lo demás al precisarse se ahonda aún más: existe un acorde interno de todas y cada una

de las mónadas; este acorde o conveniencia es la razón suficiente para la elección, de entre los infinitos universos posibles, de éste, único, existente. De suerte que el paso a la existencia es inherente a la mónada. Digámoslo de nuevo: cada vez que se sigue una de las avenidas abiertas por este pensamiento, se tropieza con algún obstáculo que impide o desvía el rumbo. La palabra *decepción* viene a los labios. Vale la pena recordar que en el siglo xvii se hablaba de decepción óptica, en el sentido actual de ilusión óptica. Tal vez nuestra decepción corresponda entonces a una ilusión de perspectiva. Y Leibniz, el constructor de sistemas por antonomasia, sea quien, por el contrario y con mayor agudeza, haya mostrado, en la práctica de su pensar, la vacuidad de todo sistema.

### III.

G. Nerlich en el primer capítulo de su libro "The Shape of Space" (Cambridge University Press, 1976) extiende la discusión acerca del espacio como árbol genealógico y pregunta: ¿Qué pudo haber querido decir Leibniz? dos cosas, al menos: i) el árbol es una mera representación del sistema de las relaciones familiares, ii) esta representación no se efectúa mediante similitudes pictóricas entre la familia y el árbol. Líneas actuales en un objeto —el árbol— deben entenderse como representando algo que no consiste en absoluto en líneas en otro objeto —la totalidad dispersa de los miembros de la familia—.

Nerlich, insiste ¿qué puede hacerse con la idea del espacio en tanto representación de objetos extensos relacionados espacialmente? Tal espacio sólo da una representación propiamente espacial de cosas extensas dispuestas espacialmente; pero esto no es una representación, es la cosa misma.

Este análisis, justo y pertinente por los demás, deja de lado el concepto de modelo leibniciano (ver *Quid Sit Idea*) pero empuja el argumento hasta un extremo: El modelo o representa al modelo o no presenta nada fuera del modelo.

Nerlich, prolonga su estudio tratando de sistemas de relaciones o diagramas de Hasse.

Respecto a esta discusión el presente trabajo intenta mostrar:

- i) Que los diagramas de Hasse no sólo son sistemas relacionales sino que engendran al espacio de modo aritmético. Al respecto cabe pensar en esa extraña frase de Pascal "Les Nombres imitent l'espace".
- ii) Que el de Arte Combinatoria, suerte de matriz del pensamiento leibniciano, contiene el atisbo o germen de la idea del árbol en tanto modelo discreto del espacio.

### III

#### *Leibniz en el laberinto*

G. Cantor construyó los conceptos que permiten operar, manipular, precisar el número infinito. Acaso pocas regiones del pensar matemático, hayan recibido en virtud de la obra de un solo matemático, semejante luz (directa o de soslayo, según la oportunidad). Encarar este tópico, después de Cantor, es, de hecho, hacerlo con otra mirada. Entonces es posible, alumbrar el laberinto leibniciano del continuo, desde tal punto de vista.

Parece necesario introducir, para ello, algunas ideas cantorianas.

Dos conjuntos son equipotentes si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre sus elementos. La potencia de un conjunto es su número cardinal. La diferencia fundamental entre conjuntos finitos e infinitos radica en que un conjunto infinito es equipotente a un subconjunto propio. Un conjunto es numerable (o enumerable) si tiene la potencia del conjunto de los enteros  $N$ . El continuo  $R$  no es numerable, es decir, la potencia del continuo es superior a la potencia de  $N$ . Puede sustraerse de un conjunto numerable un número finito de puntos sin que deje de ser numerable, y de un conjunto cuya potencia sea la del continuo un conjunto numerable de puntos e incluso una infinidad numerable de conjuntos numerables de puntos sin que deje de tener la potencia del continuo.

Cantor mostró la equipotencia entre  $R$  y  $R^n$  ( $n > 1$ ), esto es: entre la recta, el plano, el espacio tri-dimensional, etc. Resultado que por su carácter paradójico señala, si necesidad hubiera, la dificultad de separar costumbre e intuición —en su sentido usual—.

Por otra parte resolvió, es decir definió de modo adecuado, el antiguo dilema del infinito actual y del infinito potencial. Recordemos que el primero se refiere al conjunto formado por una infinidad de elementos concebidos como simultáneamente existentes, en tanto el segundo alude a la posibilidad de aumentar o disminuir (en el caso continuo) toda magnitud dada. Tal vez sea este dilema una puerta de entrada propicia al laberinto del continuo: “Puede decirse que no hay número que sea infinito, sino que sólo es verdad que por grande que sea, siempre hay otro mayor que él...”. Aquí Leibniz razona en términos de infinito potencial en tanto que el número infinito concierne al infinito actual, es decir a la potencia de un conjunto infinito: su número cardinal. La dificultad aquí es entonces confusión de planos: lo actual y lo potencial.

“Y el número de todos los números —el número máximo— implica una contradicción que expondré así: para cualquier número hay un número correspondiente igual a su doble. Por lo tanto el número de todos los números no es mayor que el número de los números pares o sea que el todo no es mayor que su parte”.

(Die Philosophischen Schriften, ed. C.J. Gerhardt I, 338). La dificultad nace de la aplicación  $n \rightarrow 2n$  y de la contradicción que resulta respecto del axioma: el todo es mayor que la parte. Este problema merece un análisis cuidadoso: comencemos con el axioma. Que el todo sea mayor que la parte es verdad cuando de conjuntos (números) finitos se trata: si se considera seis sillas y luego un subconjunto de cuatro sillas,  $6 > 4$ . Sin embargo hemos visto que en el caso de conjuntos infinitos esto no es así: un conjunto y un

subconjunto propio pueden ser equivalentes. Leibniz, y con antelación Galileo (ver nota III) extrapola indebidamente aquello que es válido para los números finitos a los números infinitos. Afirma, de hecho “se comprueba que las reglas de lo finito perduran en el infinito” (Gerhardt, Math, Schrif. IV, 93). Hay que dejar en claro lo siguiente: la sutileza leibniziana suele eludir este juego de las citas entresacadas de su obra y casi siempre es posible encontrar alguna que dice lo contrario. A modo de muestra “La idea del infinito no se forma por extensión de las ideas finitas” en contradicción no sólo con la cita anterior sino con lo que Leibniz mismo hace al extender el axioma del todo y la parte, válido en el caso finito, al análisis de los números infinitos.

Ceñido al distingo de los dos órdenes, el de lo posible o ideal y el de lo actual, Leibniz dice que en los actuales, lo simple es anterior a lo agregado y en los ideales —número, espacio, tiempo— el todo es anterior a la parte. Por ello, lo actual se divide en partes, lo ideal en cambio se resuelve en nociones. El número 1 por ejemplo es lógicamente anterior a las fracciones cuya suma es 1: las fracciones nacen de la división de la unidad y no la unidad de la suma de fracciones.

“La confusión de lo ideal con lo actual ha creado el laberinto respecto de la composición del continuum” (Gerhardt Phil. Schri. IV, 491). Para situar el sentido de esta aseveración, considérese una línea abstracta, i.e., ideal; si se piensa en ella como si fuese actual se supondrá está compuesta de puntos. Pero los puntos matemáticos son sólo extremos: inicio o término, es decir modalidades. Entes ideales por tanto. Pensar en la línea como agregado de puntos es impropio, pues los puntos no son partes actuales de un ente ideal. La confusión de los órdenes de lo posible y de lo actual es el laberinto. Curiosamente esta confusión el propio Leibniz la modula en otro registro: lo finito y lo infinito.

Volvamos al infinito actual: “Soy tan partidario del infinito actual que en lugar de admitir que la naturaleza tiene horror de él, como suele decirse, sostengo lo exhibe en todas partes...” (Gerhardt Mat. Schri. I, 416).

Para afianzar su opinión favorable dice “Los argumentos contra la infinitud actual suponen, que si se la admite, habrá un número infinito y que todas las infinitudes serán iguales” (Gerh. Mat. Schr. II, 304).

Aquí la luz cantoriana afina los perfiles: que haya un cardinal infinito no significa que todos los cardinales infinitos sean iguales. Hemos visto por ejemplo dos conjuntos infinitos que no son equivalentes: los naturales y los reales. Para subrayar la agudeza de Cantor, volvamos a la equivalencia de  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^n$ : en este caso el temor leibniziano —que todas las infinitudes sean iguales— se justifica, ya que tal idea parece consecuencia necesaria. Acaso pensar

lo infinito dejando de lado los conceptos e intuiciones válidos para los conjuntos finitos sólo sea posible después de Cantor.

Por otra parte, hemos señalado que la potencia de un conjunto infinito no puede modificarse. De cierto modo está dada: podría tratar de pensarse la idea leibniziana: en los ideales el todo es anterior a la parte siguiendo esa vertiente. Es decir haciendo un paralelo todo-potencia.

En breve: si las propiedades de los conjuntos finitos (lo finito) se extienden a los conjuntos infinitos (lo infinito), el análisis del continuum (lo continuo) no es posible: se convierte en laberinto.

### Notas

I. G. CANTOR: *Contributions to the founding of the Theory of the transfinite numbers* (Dover Pub., Inc. Reedición de la traducción inglesa de P.E.B. Jourdain).

Esta publicación recoge dos artículos. El primero principalmente, sustenta nuestra exposición.

II. En una nota de Galileo se encuentra ya la idea de equipotencia. En ella, la aplicación  $n \rightarrow n^2$  establece la correspondencia biunívoca entre los enteros naturales y sus cuadrados. El conjunto de los números cuadrados es un subconjunto de los enteros. Su equipotencia inspira instintiva desconfianza a Galileo quien aduce al axioma indiscutido e indiscutible: el todo es mayor que la parte y deja ahí el asunto. Leibniz seguirá los mismos pasos al menos por cierto trecho.

III. La distinción cantidad discreta —cantidad continua— está insita en la posibilidad misma de conocer la magnitud (Nouv. Ess., ed. Garnier Flammarion 1966, p. 131). Es necesario recurrir a la cantidad discreta para tener tal conocimiento. Si se discernen partes agregadas, su repetición es discreta; en el caso del continuo las partes son indeterminadas. En los entes actuales las partes, aún en número infinito, están perfectamente definidas. Leibniz dice que el continuum es ideal pues implica partes indeterminadas.

IV. B. Russell dedica el capítulo IX del libro ya citado al debate leibniziano en medio del continuum. Intenta desbrozar el terreno, texto en mano. “No puedo alentar la esperanza de explicar el tema claramente”, dice. En el prefacio de la segunda edición —1937— precisa que al escribir su libro —primera edición, 1900— poco sabía de la teoría de los números infinitos de Cantor. Sin embargo nada substancial parece haber añadido después a su tratamiento del continuo en Leibniz. En los siguientes años Russell estudió a Cantor. Lo cual se desprende de un texto autobiográfico (“Retratos de memoria y otros ensayos”, Alianza ed., traducción de M. Suárez; 1976, p. 28). Cuenta, entre otras cosas, que el matemático le envió uno de sus libros con la siguiente inscripción: “Veo que su lema es Kant or Cantor” (Ortografía inglesa, para respetar la eufonía).

Este estudio del continuum en Leibniz retoma, en parte, el de Russell, desde Cantor.

### IV.

Leibniz, de viaje, por Europa; jardín o mar o campo devastado por las guerras. Yendo de una intriga a una conversación palaciega. Asido, en ese intervalo viajero, a la matemática, matriz, diríase, de cada ocurrencia. Mien-



tras la carroza sigue su curso, prolónguese en close-up, un momento: por su mente pasa ese algoritmo, alfabeto universal del pensamiento, fragmentos del paisaje —por la ventanilla—, sobre un papel tal vez el inicio de un cálculo. Este intervalo, multiplicado por las circunstancias, precisa el mecanismo, por así decirlo, de los días de su vida. Fluidéz, agudeza, versatilidad: acaso estas cualidades omitan algo primordial.

Un salto de algunos siglos: Couturat edita a Leibniz, continúa hasta el límite, su inspiración de una lengua universal; la convierte en un idioma tipo esperanto, el ido. A contrario, se destaca ese cuidado de Leibniz: dejar al pensamiento en su posibilidad. A menudo esa reticencia no es coherencia. Vista la peripecia, digamos que no siempre el paso al límite significa finura; no hacerlo, una vez lanzada la idea es oponerse a su inercia. Acaso tal sea el fondo sobre y contra el cual la obra leibniziana aparece en su justo relieve: una delicadeza mental extrema, a prueba de sí misma. Aunque parezca contradictoria. Y lo sea.

Curioso cortesano. Ni la duplicidad ni el compromiso tocan ese núcleo desde el cual piensa. Y muere solo, “comme un chien”.